

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ COMPUTER SIMULATION

УДК 519.1

DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-9

Румбешт В.В.
Бурданова Е.В.

ОПИСАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО АЛГОРИТМА ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

e-mail: rumbesht@bsuedu.ru, burdanova@bsuedu.ru

Аннотация

Статья посвящена решению комбинаторной задачи – систематическому перечислению всех объектов определенного вида. В качестве объекта для перечисления принято разложение целого числа $r > 1$ в упорядоченное произведение n целых сомножителей (так называемый n -профиль числа r). Использование рассматриваемых объектов для проектирования генераторов псевдослучайных последовательностей определяет актуальность статьи. Целью статьи является создание комбинаторного алгоритма систематического перечисления всех n -профилей числа r . Для достижения цели выполнена формальная постановка задачи, проведен ее анализ, в котором введено понятие характеристической матрицы n -профиля r и установлено взаимно однозначное соответствие между профилями и характеристическими матрицами, что позволило от перечисления профилей перейти к перечислению характеристических матриц, с последующим преобразованием их в профили. На множестве характеристических матриц введено отношение B -эквивалентности, позволяющее разбить его на классы и перечислять элементы выбранного класса B -эквивалентности независимо от остальных характеристических матрицы. Показано, что порождение B -эквивалентной характеристической матрицы есть процесс определения ее элементов путем распределения единиц кратностей простых множителей в каноническом разложении числа r и подробно рассмотрен этот процесс. На этапе синтеза результаты анализа задачи воплощены в искомый алгоритм. Приведен пример перечисления n -профилей числа r с использованием этого алгоритма.

Ключевые слова: упорядоченное мультипликативное разложение; n -профиль числа r ; комбинаторный алгоритм; систематическое перечисление; характеристическая матрица n -профиля r ; процесс распределения

Для цитирования: Румбешт В.В., Бурданова Е.В. Описание комбинаторного алгоритма перечисления упорядоченных мультипликативных разложений // Научный результат. Информационные технологии. – Т.11, №3, 2026. – С. 100-111. DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-9

Rumbesht V.V.
Burdanova E.V.

DESCRIPTION OF A COMBINATORIAL ALGORITHM FOR ENUMERATING ORDERED MULTIPLICATIVE FACTORIZATIONS

Belgorod State National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

e-mail: rumbesht@bsuedu.ru, burdanova@bsuedu.ru

Abstract

The article is devoted to solving a typical combinatorial problem – a systematic enumeration of all objects of a certain type. The decomposition of an integer $r > 1$ into an ordered product of integer multipliers (the so-called n -profile of number r) is accepted as an object for enumeration. The

purpose of the article is to create a combinatorial algorithm for the systematic enumeration of all n -profiles of number r . To achieve this goal, a formal formulation of the problem was carried out, its analysis was carried out, in which the concept of a characteristic matrix of n -profile r was introduced and a one-to-one correspondence between profiles and characteristic matrices was established, which made it possible to move from enumerating profiles to enumerating characteristic matrices, followed by their transformation into profiles. An B -equivalence relation is introduced on the set of characteristic matrices, which makes it possible to divide it into classes and list the elements of the selected B -equivalence class independently of the rest of the characteristic matrices. It is shown that the generation of an B -equivalent characteristic matrix is the process of determining its elements by distributing units of multiplicities of prime factors in the canonical expansion of a number r , and this process is considered in detail. At the synthesis stage, the results of the task analysis are translated into the desired algorithm. An example of enumeration n -profiles of number r using this algorithm is given.

Keywords: ordered multiplicative decomposition; n -profile of number r ; combinatorial algorithm; systematic enumeration; characteristic matrix of n -profile of r ; distribution process

For citation: Rumbesht V.V., Burdanova E.V. Description of a Combinatorial Algorithm for Enumerating Ordered Multiplicative Factorizations // Research result. Information technologies. – Т.11, №3, 2026. – P. 100-111. DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-9

ВВЕДЕНИЕ

В работе [11] введено понятие упорядоченного мультипликативного разложения целого числа (n -профиля числа r). По определению n -профиль числа $r > 1$ есть целочисленный вектор $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, такой, что $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : r_i > 1$ и $r = \prod_{i=1}^n r_i$.

В зависимости от r и n множество всех возможных n -профилей числа r является либо конечным, либо пустым. Например, множество 3-профилей числа 100 есть $\{(2, 2, 25), (2, 25, 2), (25, 2, 2), (2, 5, 10), (2, 10, 5), (5, 2, 10), (5, 10, 2), (10, 2, 5), (10, 5, 2), (4, 5, 5), (5, 4, 5), (5, 5, 4)\}$, а множество 5-профилей 100 пусто.

Количество всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей в зависимости от параметров r и n вычисляется по формуле:

$$f(r, n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \prod_{i=1}^m C_{a_i+n-k-1}^{a_i},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ - количество сочетаний из n по k , $a_1, a_2, \dots, a_m$ - кратности простых чисел

$p_1, p_2, \dots, p_m$ в каноническом разложении числа $r = \prod_{j=1}^m p_j^{a_j}$ [11].

Так $f(100, 3) = C_3^0 C_4^2 C_4^2 - C_3^1 C_3^2 C_3^2 + C_3^2 C_2^2 C_2^2 = 36 - 27 + 3 = 12$, а

$f(100, 5) = C_5^0 C_6^2 C_6^2 - C_5^1 C_5^2 C_5^2 + C_5^2 C_4^2 C_4^2 - C_5^3 C_3^2 C_3^2 + C_5^4 C_2^2 C_2^2 = 225 - 500 + 360 - 90 + 5 = 0$.

Помимо нахождения количества всех возможных объектов определенного вида типовой комбинаторной задачей является их систематическое перечисление. Хорошо известны алгоритмы порождения и систематического перечисления перестановок, сочетаний и других классических комбинаторных объектов [1-7]. Алгоритм перечисления n -профилей еще не описан.

Данная статья посвящена восполнению этого пробела. Ее целью является создание алгоритма систематического перечисления всех n -профилей числа r .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано целое число $r > 1$, заданное каноническим разложением в произведение простых множителей, которое представлено в виде упорядоченного по возрастанию набора попарно

различных простых множителей $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и соответствующего набора их кратностей $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, таких, что $r = \prod_{j=1}^m p_j^{a_j}$. Пусть $k = \sum_{j=1}^m a_j$ - общее количество простых в этом разложении. Также дано количество компонент в упорядоченном мультипликативном разложении числа r (целое $0 < n \leq k$).

Требуется последовательно и без повторений перечислить все n -профили r - вектора $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, такие, что $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : r_i > 1$ и $r = \prod_{i=1}^n r_i$.

МЕТОДЫ

Введем понятие характеристической матрицы n -профиля числа r [6-10, 15-19].

Определение 1. Характеристической матрицей n -профиля r назовем целочисленную матрицу:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & q_{1,m} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \dots & q_{n,m} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) Матрица Q имеет размер $n \times m$, где n - количество компонент профиля, m - количество попарно различных простых чисел, входящих в каноническое разложение r ;

2) Все элементы $q_{i,j} \geq 0$;

3) $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n q_{i,j} = a_j$, где a_j суть элемент A - набора кратностей простых множителей в каноническом разложении r ;

4) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \sum_{j=1}^m q_{i,j} = b_i$ и упорядоченный набор $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ такой, что $\sum_{i=1}^n b_i = k$ есть композиция k - общего количества простых множителей в каноническом разложении r , содержащая n частей $b_i > 0$.

Выполнение этих условий означает, что в матрице Q отсутствуют строки или столбцы [11-14, 20], состоящие из одних нулей, i -тая строка ($i = 1, 2, \dots, n$) представляет собой композицию b_i из m частей, допускающую нулевые части, а j -тый столбец ($j = 1, 2, \dots, m$) есть композиция a_j из n частей, так же допускающая нулевые части.

Любому n -профилю числа r ставится в соответствие единственная характеристическая матрица. И, наоборот, если столбцам характеристической матрицы сопоставить простые числа из упорядоченного набора $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, то по ней однозначно можно построить n -профиль числа r . Покажем это.

Рассмотрим $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ - произвольный n -профиль r . Поскольку $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : r_i > 1$ и r_i делит r , то каноническое разложение r_i содержит только те простые множители, которые входят в набор $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, но не обязательно все элементы этого набора. Представим r_i в виде произведения простых множителей, при необходимости дополненного так, чтобы каждое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_m$ обязательно в нем присутствовало, пусть даже и в нулевой степени. Получим:

$$\left(r_1 = \prod_{j=1}^m p_j^{q_{1,j}}, r_2 = \prod_{j=1}^m p_j^{q_{2,j}}, \dots, r_n = \prod_{j=1}^m p_j^{q_{n,j}} \right). \quad (1)$$

Для всех компонент r_i разложение $r_i = \prod_{j=1}^m p_j^{q_{i,j}}$ единственно в силу основной теоремы арифметики [1].

Теперь, если из показателей степеней $q_{i,j}$ составить матрицу Q размером $n \times m$, то не сложно убедиться, что она удовлетворяет указанным условиям. С другой стороны, если заданы характеристическая матрица Q и упорядоченный набор $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, то по формуле (1) можно однозначно вычислить все компоненты профиля.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех возможных n -профилей r и множеством характеристических матриц размером $n \times m$.

Хотя характеристическая матрица более сложный объект, чем n -профиль r , но он более удобен для поиска решения нашей задачи. Учитывая существование взаимно однозначного соответствия между множеством профилей и множеством характеристических матриц, изменим исходную постановку задачи: при тех же исходных данных требуется последовательно и без повторений перечислить все характеристические матрицы n -профилей числа r , и для каждой из них сформировать соответствующий профиль.

На множестве характеристических матриц n -профилей r введем отношение эквивалентности.

Определение 2. Характеристические матрицы n -профиля r $Q = (q_{i,j})$ и $Q' = (q'_{i,j})$ B -эквивалентны, если $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \sum_{j=1}^m q_{i,j} = \sum_{j=1}^m q'_{i,j} = b_i$, где $b_i > 0$ - элемент композиции k из n частей - $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Это отношение разбивает множество характеристических матриц на C_{k-1}^{n-1} классов B -эквивалентности – по одному классу на каждую композицию k из n частей больших нуля.

Зафиксируем некоторую композицию $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ и ограничимся вопросами порождения B -эквивалентных характеристических матриц n -профиля r .

Порождение характеристической матрицы можно рассматривать как процесс определения ее элементов путем распределения единиц кратностей простых множителей в каноническом разложении числа r так, чтобы по его завершению выполнялись условия 1) – 4).

Реализация этого процесса приводит к получению ряда состояний, каждое состояние в котором характеризуется множеством уже определенных элементов матрицы; элементом, требующим определения; количествами нераспределенных единиц кратности по строкам и столбцам. Обозначим наборы количеств нераспределенных единиц кратности соответственно $B' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ и $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$.

В начальном состоянии этого ряда $B' = B$, $A' = A$ и множество определенных элементов пусто, а в конечном – $B' = (0, 0, \dots, 0)$, $A' = (0, 0, \dots, 0)$ и множество определенных элементов содержит все элементы матрицы. При смене состояний происходит определение значения очередного элемента и присоединение его к множеству определенных. При этом происходит уменьшение значений нераспределенных единиц кратности в соответствующей строке и столбце на величину определяемого элемента.

Таким образом, реализация процесса порождения характеристической матрицы требует организации обхода ее элементов. Условимся обходить элементы матрицы слева направо и сверху вниз и пронумеруем их в порядке этого обхода числами от 0 до $n \cdot m - 1$. Тогда номер любого состояния в процессе порождения характеристической матрицы будет совпадать с номером текущего элемента в обходе (он же элемент, требующий определения), а множество ранее определенных элементов содержит все элементы с номерами меньшими чем текущий. Исключение составляет только конечное состояние, которое имеет номер $n \cdot m$, а определяемого элемента не имеет. По известному номеру $k \in \{0, 1, \dots, n \cdot m - 1\}$ для элемента $q_{i,j}$ легко определить номера

строки и столбца, в которых он расположен: $i = (k \operatorname{div} m) + 1$ и $j = (k \operatorname{mod} m) + 1$, где div и mod - операции целочисленного деления и получения остатка.

Пусть процесс порождения характеристической матрицы находится в состоянии, для которого определяемым элементом является $q_{i,j}$, а наборы количеств нераспределенных единиц кратности по строкам и столбцам соответственно $B' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ и $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$. Что можно сказать относительно возможного значения $q_{i,j}$?

Во-первых, по определению $q_{i,j} \geq 0$.

Во-вторых, значение $q_{i,j}$ не больше чем количество имеющихся единиц кратности a'_j и не больше чем количество единиц кратности, требующих распределения b'_i . То есть $q_{i,j} \leq \min(a'_j, b'_i)$.

В-третьих, пусть $s = \sum_{k=j+1}^m a'_k$ - суммарное количество имеющихся единиц кратности, которые могут быть задействованы для достижения b'_i . Если $b'_i > s$, то недостающие единицы следует выбирать из тех, которые соответствуют столбцу j , и $b'_i - s$ есть минимальное их количество. То есть $q_{i,j} \geq \max(0, b'_i - s)$.

Таким образом, $\max(0, b'_i - \sum_{k=j+1}^m a'_k) \leq q_{i,j} \leq \min(a'_j, b'_i)$ и для определения $q_{i,j}$ достаточно

выбрать любое значение из указанного диапазона, уменьшив при этом значения a'_j и b'_i на выбранную величину.

Не сложно убедиться, что при реализации рассмотренного процесса распределения будет порождена характеристическая матрица, удовлетворяющая всем требуемым условиям.

Придерживаясь определенной стратегии при определении очередного элемента, можно получить некоторые особые характеристические матрицы. Так, если в процессе распределения в качестве значений определяемых элементов всегда выбирать максимально возможные, то порожденную матрицу будем называть сформированной по максимуму. А при выборе всегда минимально возможных значений получим матрицу, сформированную по минимуму.

РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим EnumProf - общий алгоритм решение поставленной задачи.

Введенное ранее понятие характеристической матрицы n -профиля числа r , позволяет рассматривать перечисление профилей как процесс порождения их характеристических матриц, в котором каждая матрица преобразуется в соответствующий профиль, выводимый на печать.

Алгоритм EnumProf содержит цикл, который выполняется для всех композиций k из n частей больших нуля. На каждой итерации этого цикла выбирается очередная композиция $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, используемая в дальнейшем для порождения B -эквивалентных характеристических матриц. Для организации этого цикла можно применить известный алгоритм лексикографического перечисления композиций числа из n частей больших нуля [4].

Далее идет цикл по порождению B -эквивалентных характеристических матриц, первой из которых является матрица сформированная по максимуму. Формирование этой матрицы выполняет процедура GetFirstMatr.

В теле этого цикла по характеристической матрице и упорядоченному набору простых множителей в каноническом разложении r вычисляется и выводится очередной n -профиль r . Затем с помощью процедуры GetNextMatr осуществляется попытка породить следующую характеристическую матрицу на основании текущей. Такая попытка успешна, если текущая

характеристическая матрица не является сформированной по минимуму. Эти действия выполняются пока процедура GetNextMatr в состоянии породить следующую матрицу.

Блок-схема алгоритма EnumProf приведена на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема систематического перечисления n -профилей числа r
Fig. 1. Flowchart for the systematic enumeration of n -profiles of the number r

Алгоритм, выполняемый процедурой GetFirstMatr, реализует процесс порождения характеристической матрицы с использованием стратегии формирования по максимуму. Его блок-схема приведена на рис. 2.

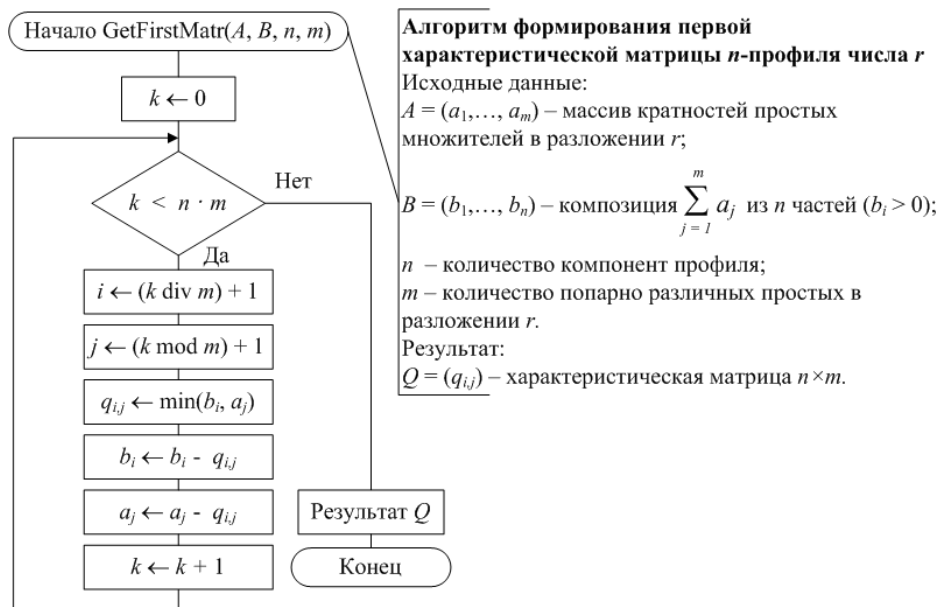


Рис. 2. Блок-схема алгоритма формирования первой B -эквивалентной характеристической матрицы n -профиля r
Fig. 2. Flowchart of the algorithm for generating the first B -equivalent characteristic matrix of the n -profile r

Исходными данными для процедуры GetNextMatr является любая характеристическая матрица n -профиля r . Идея, реализованная в этой процедуре, состоит в том, чтобы, применяя

процесс распределения единиц кратности, начиная от его конечного состояния, вернуться к такому состоянию, для которого определяемый элемент не достиг минимально возможного значения. Если такое состояние не найдено, то исходная характеристическая матрица является сформированной по минимуму, и следующей матрицы нет. В противном случае следует уменьшить на единицу текущее значение определяемого элемента, а все последующие элементы определить с помощью процесса распределения с использованием стратегии формирования по максимуму.

Блок-схема алгоритма процедуры GetNextMatr приведена на рис. 3.

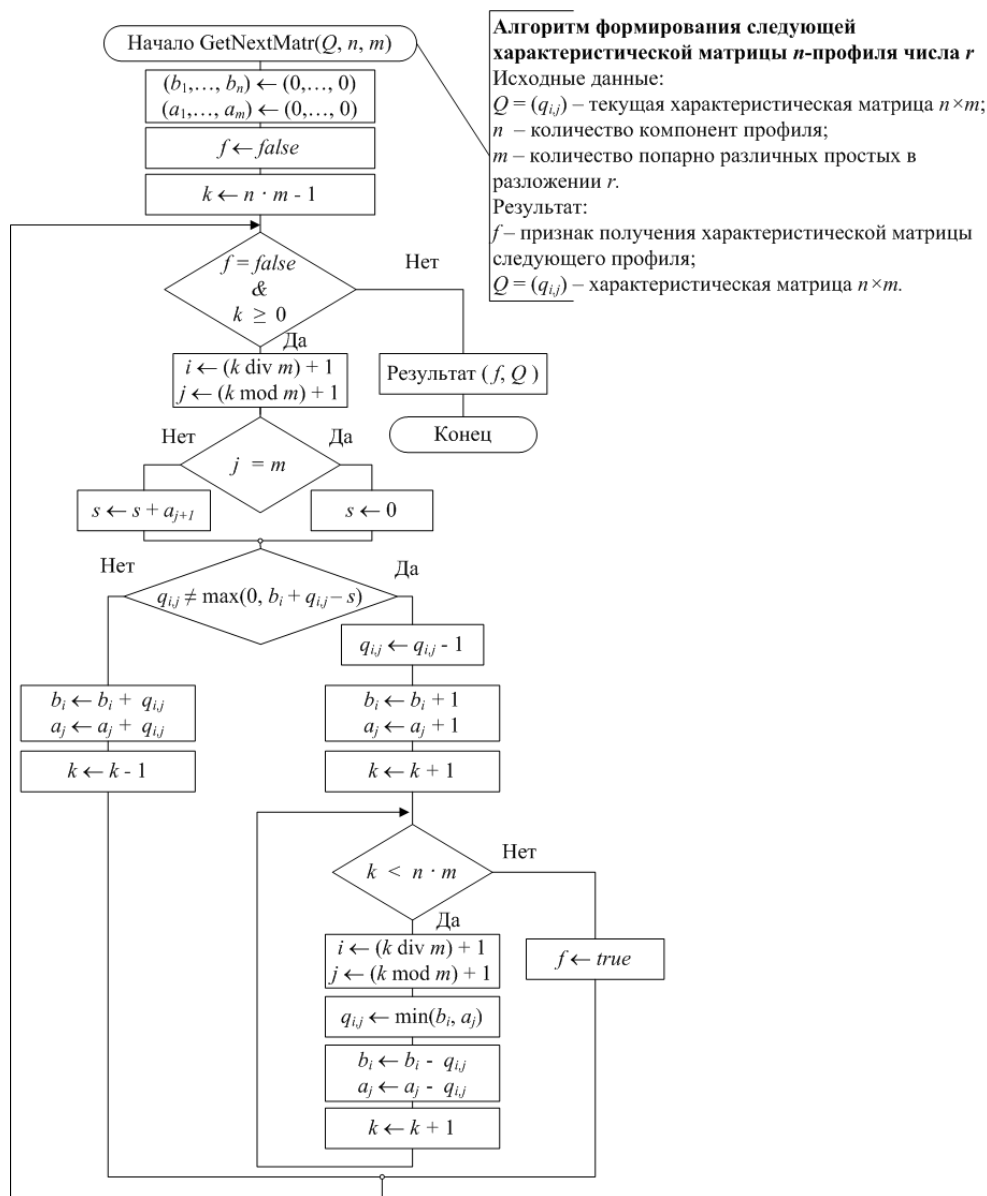


Рис. 3. Блок-схема алгоритма формирования следующей характеристической матрицы n -профиля r
Fig. 3. Flowchart of the algorithm for generating the next characteristic matrix of the n -profile r

ВЫВОДЫ

Таким образом в данной статье описан алгоритм систематического перечисления всех n -профилей числа r , и для проверки работоспособности алгоритма найдем перечисления всех 3-профилей числа 100.

Исходные данные: целое число $r = 100$, заданное каноническим разложением в произведение простых множителей $100 = 2^2 \cdot 5^2$, которое представлено в виде упорядоченного по возрастанию

набора попарно различных простых множителей $P = (p_1, p_2) = (2, 5)$ и соответствующего набора их кратностей $A = (a_1, a_2) = (2, 2)$; количество компонент профиля $n = 3$; количество попарно различных простых множителей в каноническом разложении сотни $m = 2$. Общее количество простых множителей в каноническом разложении сотни $k = \sum_{j=1}^m a_j = 4$.

Всего 3-профилей числа 100 существует 12. Все они в качестве примера приведены во введении.

Алгоритм EnumProf перечисляет n -профили r отдельно для каждой композиции k из n частей. Если записать такие композиции в лексикографическом порядке, то получим: $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$.

На первой итерации внешнего цикла алгоритма EnumProf будет принята композиция $B = (b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 2)$ и для нее с помощью процедуры GetFirstMatr будет порождена характеристическая матрица Q , сформированная по максимуму. Процесс, реализуемый GetFirstMatr, последовательно проходит 7 состояний от начального состояния с номером 0 до конечного состояния с номером 6. Описания этих состояний приведены на рис. 4.

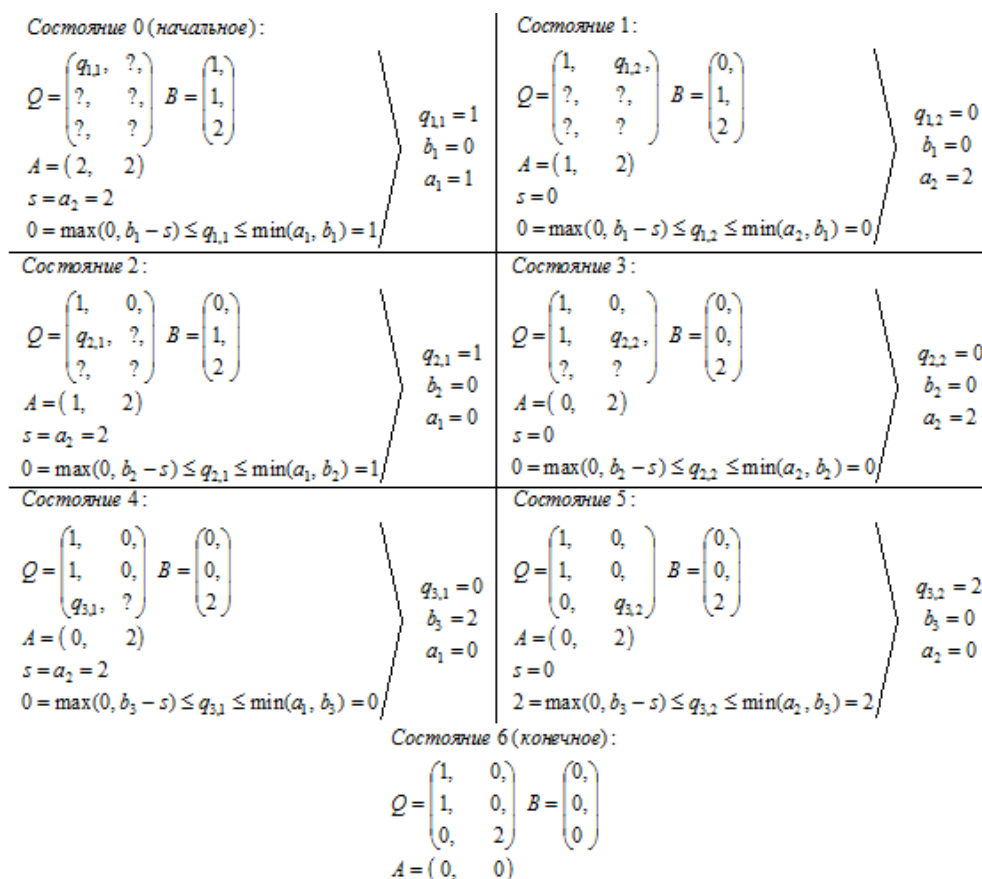


Рис. 4. Состояния процесса порождения характеристической матрицы Q , сформированной по максимуму

Fig. 4. States of the process of generating the characteristic Q matrix formed based on the maximum

Затем следует вложенный цикл, в теле которого с помощью процедуры *GetNextMatr*, применяемой для текущей характеристической матрицы, порождается матрица, следующая за ней.

Рассмотрим процесс порождения матрицы следующей за $Q = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 0 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$.

Проходя по состояниям процесса порождения характеристической матрицы в направлении от конечного состояния к начальному, процедура *GetNextMatr* дойдет до состояния, в котором определяемый элемент не достиг минимально возможного значения. Это состояние имеет номер 2 (см. рис. 4). Затем, уменьшив на единицу значение $q_{2,1}$, *GetNextMatr* пройдет состояния 3 - 5, выбирая максимально возможные значения определяемых элементов. Указанные действия иллюстрирует рис. 5.

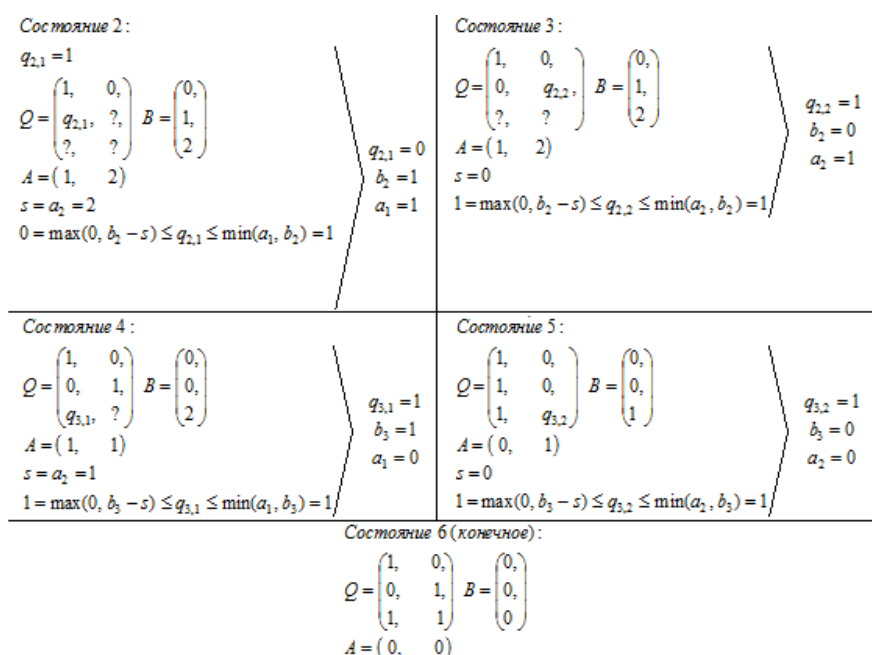


Рис. 5. Состояния процесса порождения следующей характеристической матрицы
Fig. 5. States of the process of generating the next characteristic matrix

Продолжая выполнять действия, предусмотренные алгоритмом *EnumProf*, получим полный перечень 3-профилей числа 100. Полученный перечень представлен в табл. 1.

Перечень профилей

List of profiles

Таблица 1

Table 1

№ профиля	№ матрицы	Характеристическая матрица	3-профиль числа 100
Композиция $B = (1, 1, 2)$			
1	1	$Q = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 0 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_3 = 2^0 \cdot 5^2 = 25$

2	2	$Q = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_2 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$
3	3	$Q = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$
4	4	$Q = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 0, 1 \\ 2, 0 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_2 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_3 = 2^2 \cdot 5^0 = 4$
Композиция $B = (1, 2, 1)$			
5	1	$Q = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$ $r_3 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$
6	2	$Q = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 2 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_2 = 2^0 \cdot 5^2 = 25$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$
7	3	$Q = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 2, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_2 = 2^2 \cdot 5^0 = 4$ $r_3 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$
8	4	$Q = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$
Композиция $B = (2, 1, 1)$			
9	1	$Q = \begin{pmatrix} 2, 0 \\ 0, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^2 \cdot 5^0 = 4$ $r_2 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_3 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$
10	2	$Q = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_3 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$
11	3	$Q = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^1 \cdot 5^1 = 10$ $r_2 = 2^0 \cdot 5^1 = 5$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$
12	4	$Q = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 1, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$	$r_1 = 2^0 \cdot 5^2 = 25$ $r_2 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$ $r_3 = 2^1 \cdot 5^0 = 2$

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Список литературы

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., ГИТТЛ, 1952. – 180 с.
2. Гияси А., Михайлов И.П., Чубариков В.Н. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник. – 2022. – №23(5). – С. 38-44.
3. Данилов А.В., Макарычев П.П. Комбинаторный алгоритм назначения целей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2025. – № 3 (75). – С. 86-99.
4. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – 2001. – М.: Лаборатория Базовых Знаний. – С. 288
5. Инютин С.А. Вычислительные средства модулярной алгоритмики: монография М., 2024.
6. Исследование подходов детекции движущихся объектов на зашумлённых изображениях / Абрамов К.В., Александров К.С., Балабанова Т.Н., Бабенко А.А., Бурданова Е.В. // Научный результат. Информационные технологии. – Т. 10, №1. – 2025. – С. 47-57.
7. Кайгородов Е.В., Крылов П.А., Туганбаев А.А. О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности // Прикладная математика & Физика. – 2024. – Т. 56. № 4. – С. 273-285.
8. Метод системно-объектного моделирования документооборота / Наджаджра М.Х., Бобышев П.П., Федоров В.И., Лозовая С.Ю., Бабенко А.А. // Экономика. Информатика. – 2026. – Т. 53. № 1. – С. 122-135.
9. Об оценивании размеров информативных фрагментов на изображениях морской поверхности / Черноморец Д.А., Болгова Е.В., Черноморец А.А., Петина М.А. // Научный результат. Информационные технологии. – Т.9, №2. – 2024. – С. 3-11.
10. Полюга В.А., Шабли Ю.В. Исследование быстродействия программной реализации алгоритмов комбинаторной генерации в зависимости от подхода к представлению данных // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук. Сборник материалов IX Международной научно-практической конференции (школы-семинара) молодых ученых. Тольятти. – 2023. – С. 60-66.
11. Румбешт В.В., Бурданова Е.В. Комбинаторика упорядоченных мультипликативных разложений // Научные ведомости БелГУ: Экономика. Информатика. 2020. – № 47 (1) – С.126-134.
12. Рыженко К.В., Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д. Приближенные алгоритмы с константными оценками точности для некоторых асимметричных задач комбинаторной маршрутизации // Современные проблемы математики и её приложений. Тезисы Международной (54-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург. – 2023. – С. 56.
13. Сохраби М., Фатхоллахи-Фард А.М., Громов В.А. Алгоритм генетической инженерии (gea): эффективный метаэвристический алгоритм для решения задач комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 3. – С. 23-37.
14. Токарева А.В., Кручинин Д.В. О возможности применения алгоритмов комбинаторной генерации к процессу инвентаризации // Решетневские чтения. Материалы XXVII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева: в 2-х частях. Красноярск. – 2023. – С. 171-173.
15. Adams S. Locally free actions on lorentz manifolds // Geometric and Functional Analysis. – 2000. – Т. 10. № 3. – P. 453-515.
16. Antinucci G., Giuliani A., Greenblatt R.L. Non-integrable ising models in cylindrical geometry: grassmann representation and infinite volume limit // Annales Henri Poincare. – 2022. – Т. 23. № 3. – P. 1061-1139.
17. Holroyd A.E., Janson S., Wästlund J. Minimal matchings of point processes // Probability Theory and Related Fields. – 2022. – Т. 184. № 1. – P. 571-611.
18. Isaev A.P. Quantum groups and yang-baxter equations // Natural Science Review. – 2025. – Т. 2. № 2. – P. 1-192.
19. Marò S., Bonanno C. Asymptotic behaviour of orbit determination for hyperbolic maps // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2021. Т. 133. – № 6.
20. Jiang H., Benzaria S., Alsadun N., Jia J., Czaban-Jóźwiak Ju., Guillerm V., Shkurenko A., Thiam Z., Bonneau M., Maka V.K., Chen Zh., Ameuhhr Z.O., O’Keeffe M., Eddaoudi M. Merged-nets enumeration for the systematic design of multicomponent reticular structures // Science. – 2024. – Т. 386. – № 6722. – P. 659-666.

References

1. Vinogradov I.M. Fundamentals of Number Theory. Moscow, GITTL, 1952. – 180 p.
2. Giyasi A., Mikhailov I.P., Chubarikov V.N. On the uniform distribution of remainders in the expansion of real numbers according to a multiplicative number system. // *Chebyshevskii Sbornik*. 2022. No. 23(5). pp. 38-44.
3. Danilov A.V., Makarychev P.P. Combinatorial algorithm for target assignment // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Povolzhsky Region. Technical Sciences*. 2025. No. 3 (75). pp. 86-99.
4. Ivanov B.N. Discrete Mathematics: Algorithms and Programs. 2001. Moscow: Laboratoriya Bazovykh Znaniy. 288 p.
5. Inyutin S.A. Computational Tools for Modular Algorithms: Monograph. Moscow, 2024.
6. Study of approaches to detecting moving objects in noisy images / Abramov K.V., Alexandrov K.S., Balabanova T.N., Babenko A.A., Burdanova E.V. // *Research result. Information technologies*. – T. 10, №1, 2025. – P. 47-57.
7. Kaygorodov E.V., Krylov P.A., Tuganbaev A.A. On some linear maps of incidence coalgebras // *Applied Mathematics & Physics*. – 2024. – T. 56. No. 4. – P. 273-285.
8. Method of System-Object Modeling of Document Flow / Najajra M.H., Bobyshev P.P., Fedorov V.I., Lozovaya S.Y., Babenko A.A. // *Economics. Information Technologies*. – 2026. – 53(1) – P. 122-135.
9. Chernomorets D.A., Bolgova E.V., Chernomorets A.A., Petina M.A. On estimating the size of informative fragments in the sea surface images // *Research result. Information technologies*. – T.9, №2, 2024. – P. 3-11.
10. Polyuga V.A., Shablya Yu.V. Investigation of the Performance of Software Implementations of Combinatorial Generation Algorithms Based on Data Representation Approaches // *Applied Mathematics and Informatics: Modern Research in Natural and Technical Sciences. Proceedings of the IX International Scientific and Practical Conference (Workshop-Seminar) of Young Scientists. Tolyatti*. – 2023. – P. 60-66.
11. Rumbesht V.V., Burdanova E.V. Combinatorics of ordered multiplicative factorizations. // *Scientific Bulletin of Belgorod State University: Economics. Informatics*. 2020. – No. 47 (1). – P. 126-134.
12. Ryzhenko K.V., Khachay M.Yu., Neznakhina E.D. Approximation algorithms with constant accuracy bounds for certain asymmetric combinatorial routing problems // *Modern Problems of Mathematics and Its Applications. Abstracts of the International (54th All-Russian) Youth School-Conference. Yekaterinburg*. – 2023. – P. 56.
13. Sohrabi M., Fathollahi-Fard A.M., Gromov V.A. Genetic Engineering Algorithm (GEA): An Efficient Metaheuristic Algorithm for Solving Combinatorial Optimization Problems // *Automation and Remote Control*. – 2024. – No. 3. – P. 23-37.
14. Tokareva A.V., Kruchinin D.V. On the Applicability of Combinatorial Generation Algorithms to the Inventory Process // *Reshetnev Readings: Proceedings of the XXVII International Scientific and Practical Conference Dedicated to the Memory of Academician M.F. Reshetnev, General Designer of Rocket and Space Systems: in 2 parts. Krasnoyarsk*. – 2023. – P. 171-173.
15. Adams S. Locally free actions on lorentz manifolds // *Geometric And Functional Analysis*. – 2000. – T. 10. № 3. – P. 453-515.
16. Antinucci G., Giuliani A., Greenblatt R.L. Non-integrable ising models in cylindrical geometry: grassmann representation and infinite volume limit // *Annales Henri Poincare*. – 2022. – T. 23. № 3. – P. 1061-1139.
17. Holroyd A.E., Janson S., Wästlund J. Minimal matchings of point processes // *Probability Theory and Related Fields*. – 2022. – T. 184. № 1. – P. 571-611.
18. Isaev A.P. Quantum groups and yang-baxter equations // *Natural Science Review*. – 2025. – T. 2. № 2. – P. 1-192.
19. Marò S., Bonanno C. Asymptotic behaviour of orbit determination for hyperbolic maps // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2021. T. 133. – № 6.
20. Jiang H., Benzaria S., Alsadun N., Jia J., Czaban-Józwiak Ju., Guillerm V., Shkurenko A., Thiam Z., Bonneau M., Maka V.K., Chen Zh., Ameuhhr Z.O., O’Keeffe M., Eddaoudi M. Merged-nets enumeration for the systematic design of multicomponent reticular structures // *Science*. – 2024. – T. 386. – № 6722. – P. 659-666.

Румбешт Вадим Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и программного обеспечения информационных систем, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Бурданова Екатерина Васильевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математического и программного обеспечения информационных систем, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Rumbesht Vadim Valeryevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical and Software Support for Information Systems, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Burdanova Ekaterina Vasilyevna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical and Software Support for Information Systems, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia