

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION SYSTEM AND TECHNOLOGIES

УДК 519.651

DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-1

**Сысоев Р.В.
Антамошкин О.А.**

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
К МУЛЬТИМОДАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ**

Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный, 79, г. Красноярск, 660041, Россия

e-mail: romansw00@inbox.ru

Аннотация

В статье предлагается метод интегральной аппроксимации как эффективный инструмент для упрощения рельефа сложных функций, возникающих в задачах численной оптимизации. Традиционные методы оптимизации часто сталкиваются с трудностями при работе с функциями, обладающими большим количеством локальных экстремумов. Интегральная аппроксимация предлагает решение, заменяя исходную функцию более гладкой версией. В статье представлены результаты численных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенного метода на наборе тестовых мультимодальных функций. В заключении авторы обсуждают перспективы дальнейшего развития метода и его потенциальное применение в различных областях, требующих эффективной оптимизации сложных функций.

Ключевые слова: интегральная аппроксимация; сглаживание функций; оптимизация; высокая размерность; гладкие аппроксимации

Для цитирования: Сысоев Р.В., Антамошкин О.А. Применение интегральной аппроксимации к мультимодальным функциям // Научный результат. Информационные технологии. – Т.11, №3, 2026. – С. 3-10. DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-1

**Sysoev R.V.
Antamoshkin O.A.**

**APPLICATION OF INTEGRAL APPROXIMATION
TO MULTIMODAL FUNCTIONS**

Siberian Federal University
79 Svobodnyj ave., Krasnoyarsk, 660041, Russia

e-mail: romansw00@inbox.ru

Abstract

The article proposes the method of integral approximation as an effective tool for simplifying the relief of complex functions arising in numerical optimization problems. Traditional optimization methods often face difficulties when working with functions that have a high degree of non-smoothness or a large number of local extremes. Integral approximation offers a solution by replacing the original function with a smoother integral version of it. The article presents the results of numerical experiments confirming the effectiveness of the proposed method on a set of test multimodal functions. In conclusion, the authors discuss the prospects for further development of the method and its potential application in various areas that require effective optimization of complex functions.

Keywords: integral approximation; smoothing of functions; optimization; high dimensionality; smooth approximations

For citation: Sysoev R.V., Antamoshkin O.A. Application of Integral Approximation to Multimodal Functions // Research result. Information technologies. – Т.11, №3, 2026. – P. 3-10. DOI: 10.18413/2518-1092-2026-11-3-0-1

ВВЕДЕНИЕ

В эпоху стремительного развития вычислительных технологий, оптимизация сложных функций является ключевой задачей во множестве областей, от машинного обучения и финансового моделирования до проектирования инженерных сооружений и поиска оптимальных параметров в физических симуляциях. Однако, многие реальные функции, с которыми приходится сталкиваться, обладают высокой сложностью, а также могут быть вычислительно затратными для прямого анализа и оптимизации [1-3]. В связи с этим, методы аппроксимации функций играют важную роль, позволяя заменять оригинальную сложную функцию более простой и управляемой моделью, сохраняя при этом достаточную точность для успешного применения алгоритмов оптимизации.

Большинство известных методов сглаживания [4-5], таких как гауссовы фильтры или регуляризованные аппроксимации, не учитывают специфическую геометрию целевой функции. В таких случаях, как методы наименьших квадратов, полиномиальные и кусочно-полиномиальные методики сглаживают только заданный диапазон координат. Мы предлагаем метод интегральной аппроксимации, который действителен на всей протяженности целевой функции, а также учитывает специфику каждой целевой функции тем, что значение аппроксимированной функции в каждой точке является средним значением исходной функции в соответствующей точке на заданном диапазоне.

В данной статье предложен новый метод интегральной аппроксимации, отличающийся от существующих, а также исследуется применимость метода интегральной аппроксимации функций, разработанного для повышения эффективности методов оптимизации в условиях высокой размерности и сложности целевых функций.

Целью данной работы является предоставить исследователям и практикам инструмент, способствующий более эффективному решению задач оптимизации, связанных с аппроксимацией сложных функций.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Интегральная аппроксимация

Пусть $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая и локально-интегрируемая функция, $S > 0$ – параметр, $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим функцию:

$$\bar{f}(X) = \int_{(x_1-S)}^{(x_1+S)} \dots \int_{(x_N-S)}^{(x_N+S)} f(X) dx_1 \dots dx_N$$

Тогда:

1. функция $\bar{f}(X, S)$ является средней интегральной аппроксимацией функции $f(X)$ в точке X , т.е. принимает значение среднего значения $f(X)$ на гиперкубе с центром в X и длиной ребра $2 * S$;
2. Если $f(X)$ непрерывна в точке X , то: $\lim_{S \rightarrow 0} \bar{f}(X, S) = f(X)$.

Структура работы

Данный метод подходит для сглаживания мультимодальных функций, некоторые из них будут рассмотрены далее. В последующий примерах будет приведено сравнение применения адаптивного метода оптимизации *Adam* (*Adaptive Moment Estimation*) для поиска минимума исходной и аппроксимированной функции при равных параметрах и исходной точки. Также, в конце каждого подраздела будет приведена визуализация путей поиска минимума функции, где черной линией будет представлен путь поиска по исходной функции $f(X)$, а красной поиск по сглаженной $\bar{f}(X)$.

Функция Растригина

Функция Растригина – это невыпуклая функция, которая часто используется в качестве тестовой функции для алгоритмов оптимизации, особенно эволюционных алгоритмов и методов глобальной оптимизации. Она была предложена Леонардом Растригиным в 1974 году [6].

Исходный вид функции:

$$f_1(x_1, x_2) = 20 * ((x_1^2 - 10 * \cos(2 * \pi * x_1)) + (x_2^2 - 10 * \cos(2 * \pi * x_2))) \quad (1.1)$$

Аппроксимированный вид, при значении $S = 3$:

$$\tilde{f}_1(x_1, x_2) = \int_{(x_1-S)}^{(x_1+S)} \int_{(x_2-S)}^{(x_2+S)} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 36 * x_1^2 + 36 * x_2^2 + 936 \quad (1.2)$$

Следует отметить – обновленная функция (уравнение 1.2) полностью избавлена от тригонометрической составляющей и представляет собой полусферу.

Функция имеет глобальный минимум в точке $X_{min} = (0, \dots, 0)$, где $f_1(X_{min}) = 0$. При исходных параметрах поиска:

- $X_0 = (-4, 4)$;
- $lr = 0.2$;
- $tolerance = 10^{-13}$;
- ограничении числа итераций в 1000.

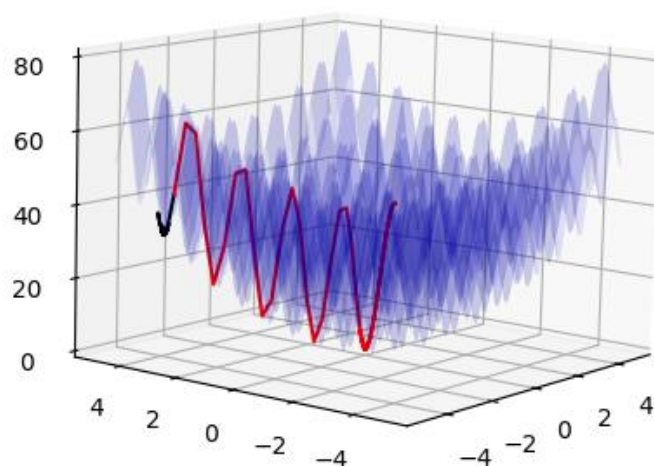


Рис. 1. Пути поиска минимума функции Растригина с использованием исходной и аппроксимированной функции

Fig. 1. Paths to the minimum of the Rastrigin function using the original and approximated functions

Функция Экли

Функция Экли – это невыпуклая функция, широко используемая в качестве тестовой функции для алгоритмов оптимизации. Она была предложена Дэвидом Экли в его диссертации на соискание докторской степени в 1987 году [7].

Исходный вид функции:

$$f_2(x_1, x_2) = -20 * \exp\left(-0.2 * \sqrt{\frac{1}{2} * (x_1^2 + x_2^2)}\right) - \exp\left(\frac{1}{2} * (\cos(2 * \pi * x_1) + \cos(2 * \pi * x_2))\right) + 20 + e^1 \quad (2.1)$$

Аппроксимированный вид, при значении $S = 1$:

$$\tilde{f}_2(x_1, x_2) = \int_{(x_1-1)}^{(x_1+1)} \int_{(x_2-1)}^{(x_2+1)} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

Функция имеет глобальный минимум в точке $X_{min} = (0, \dots, 0)$, где $f_1(X_{min}) = 0$. При исходных параметрах поиска:

- $X_0 = (-10, 10)$;
- $lr = 0.2$;
- $tolerance = 10^{-13}$;
- ограничении числа итераций в 1000.

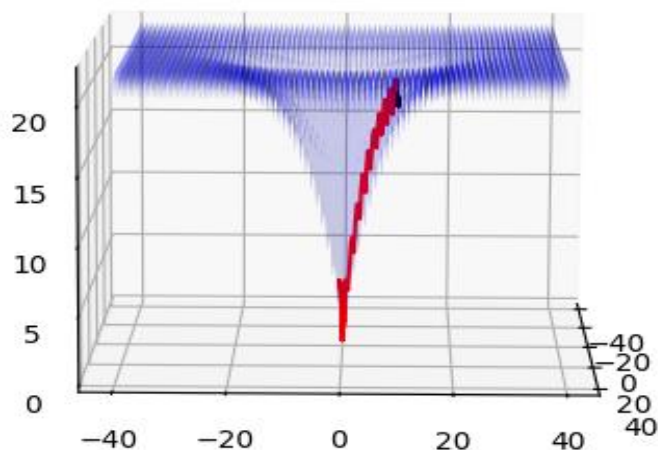


Рис. 2. Пути поиска минимума функции Экли с использованием исходной и аппроксимированной функции

Fig. 2. Paths to the minimum of the Ackley function using the original and approximated functions

Функция «Cross-in-Tray»

Функция «Cross-in-Tray» – это двумерная тестовая функция, используемая для оценки алгоритмов глобальной оптимизации [8]. Она отличается своей сложностью и наличием нескольких глобальных минимумов.

Исходный вид функции:

$$f_3(x_1, x_2) = -0.0001 * \left(\left| \sin(x_1) * \sin(x_2) * \exp \left(\left| 100 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\pi} \right| \right) \right| + 1 \right)^{0.1} \quad (3.1)$$

Аппроксимированный вид, при значении $S = \pi$:

$$\tilde{f}_3(x_1, x_2) = \int_{(x_1-\pi)}^{(x_1+\pi)} \int_{(x_2-\pi)}^{(x_2+\pi)} f_3(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.2)$$

Функция имеет глобальный минимум в точке $X_{min} = (0, \dots, 0)$, где $f_1(X_{min}) = 0$. При исходных параметрах поиска:

- $X_0 = (10, -10)$;
- $lr = 0.2$;
- $tolerance = 10^{-13}$;
- ограничении числа итераций в 1000.

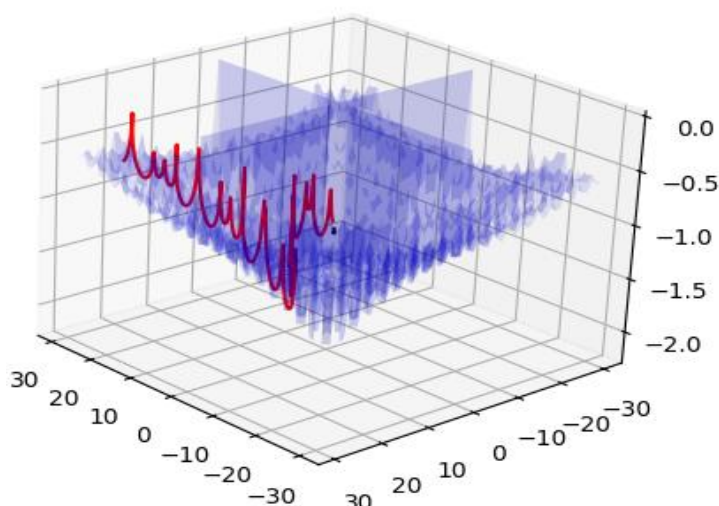


Рис. 3. Пути поиска минимума функции «Cross-in-Tray» с использованием исходной и аппроксимированной функции

Fig. 3. Paths to the minimum of the "Cross-in-Tray" function using the original and approximated functions

Функция Гриуэнка

Функция Гриуэнка – многомерная тестовая функция, часто используемая для оценки производительности алгоритмов глобальной оптимизации[9]. Она известна своим умеренно сложным рельефом, включающим множество локальных минимумов, окружающих глобальный минимум.

Исходный вид функции:

$$f_4(x_1, x_2) = 1 + \frac{1}{4000} * (x_1^2 + x_2^2) - \left(\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{1}}\right) * \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \right) \quad (4.1)$$

Аппроксимированный вид, при значении $S = \pi$:

$$\tilde{f}_4(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) = \int_{(x_1-S)}^{(x_1+S)} \int_{(x_2-S)}^{(x_2+S)} f_4(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\pi^2 * (3 * x_1^2 + 3 * x_2^2 + 2 * \pi^2 + 12000)}{3000} \quad (4.2)$$

Отметим, что обновленная функция (уравнение 4.2) полностью избавлена от тригонометрической составляющей.

Функция имеет глобальный минимум в точке $X_{min} = (0, \dots, 0)$, где $f_1(X_{min}) = 0$. При исходных параметрах поиска:

- $X_0 = (-15, 20)$;
- $lr = 0.2$;
- $tolerance = 10^{-13}$;
- ограничении числа итераций в 1000.

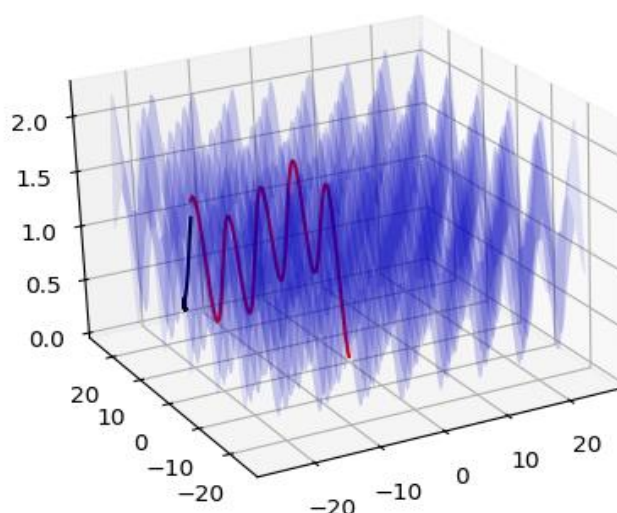


Рис. 4. Пути поиска минимума функции Гриуэнка с использованием исходной и аппроксимированной функции

Fig. 4. Paths to the minimum of the Griewank function using the original and approximated functions

Функция Швевеля

Исходный вид функции Швевеля [10]:

$$f_5(x_1, x_2) = 418.9829 * 2 - \left((x_1 * \sin(\sqrt{|x_1|})) + (x_2 * \sin(\sqrt{|x_2|})) \right) \quad (4.3)$$

Аппроксимированная форма уравнения 4.1 представляет собой тот же график в двух вариациях:

1. Сжатый по аппликате, при значениях $S \leq 1$;
2. Увеличенный по аппликате, при значениях $S > 1$.

В данных условиях, применение интегральной аппроксимации не дает должного эффекта сглаживания, и того же поведения алгоритма оптимизации можно было бы добиться корректировками параметров поиска.

ОБСУЖДЕНИЕ

Базовый подход интегральной аппроксимации функций отлично себя показывает в случаях статичного расстояния между ближайшими локальными экстремумами, как в случае функций Растригина, Экли и Гриуэнка (Таблица).

Однако, поведение алгоритма аппроксимации в функции Швевеля связывается с тем, что в данном примере частота появления экстремумов реализует иную зависимость, а именно $f_{dynamic}(x) = \sin(\sqrt{|x|})$.

В случае функции «Cross-in-Tray» метод удалился от точки минимума в силу того, что точки глобального минимума функции расположены вблизи точек глобального максимума, где, в данной функции – точек минимума намного меньше, чем точек максимума. В данном случае алгоритм направился в сторону удаления от глобальных максимумов.

Таблица

Результаты поиска минимума функций

Table

Results of function minimization

Функция	Итерации	Найденная точка	Значение	Тип экстремума
$f_1(x_1, x_2)$	284	$(-3.98, 3.98)$	31.838	Локальный
$\tilde{f}_1(x_1, x_2)$	344	$(-6.5 * 10^{-8}, 6.5 * 10^{-8})$	$1.67 * 10^{-12}$	Около глобального
$f_2(x_1, x_2)$	279	$(-9.99, 9.99)$	17.29	Локальный
$\tilde{f}_2(x_1, x_2)$	1000	$(0.015, -0.015)$	0.072	Около глобального
$f_3(x_1, x_2)$	226	$(10.77, -10.77)$	-1.4913	Локальный
$\tilde{f}_3(x_1, x_2)$	300	$(29.22, 19.48)$	-0.73	Локальный
$f_4(x_1, x_2)$	233	$(-15.7, 22.19)$	0.18	Локальный
$\tilde{f}_4(x_1, x_2)$	437	$(-2.465 * 10^{-8}, -1.17 * 10^{-6})$	$3.499 * 10^{-13}$	Около глобального

В связи с этим, авторами предлагается внести корректировку в метод аппроксимации и реализовать параметр S как функцию $S(x)$ для случаев динамической частоты исходных функций.

В таком случае определение $\tilde{f}(X, S)$ принимает следующий вид:

$$\tilde{f}(X, S) = \int_{(x_1-S(x))}^{(x_1+S(x))} \dots \int_{(x_N-S(x))}^{(x_N+S(x))} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

ВЫВОДЫ

Проведённое исследование подтвердило высокую эффективность метода интегральной аппроксимации для сглаживания и приближения сложных функций, характерных для задач оптимизации в условиях высокой размерности. Представленный подход позволяет получать гладкие аппроксимации исходных функций, что существенно облегчает применение численных методов оптимизации и повышает их сходимость и устойчивость. Практическая реализуемость метода и его гибкость делают его перспективным инструментом для широкого круга задач в области оптимизации и численного анализа. Дальнейшие исследования могут быть направлены на адаптацию метода к специфическим классам функций и расширение его применения в различных прикладных областях.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Список литературы

1. Sun R.Y. Optimization for deep learning: An overview // Journal of the Operations Research Society of China. – 2020. – Т. 8. – №. 2. – P. 249-294.
2. Gunantara N. A review of multi-objective optimization: Methods and its applications // Cogent Engineering. – 2018. – Т. 5. – №. 1. – P. 1502242.
3. Sun S. et al. A survey of optimization methods from a machine learning perspective // IEEE transactions on cybernetics. – 2019. – Т. 50. – №. 8. – P. 3668-3681.
4. Vazirani V.V. Approximation algorithms. – Berlin: springer, 2001. – Т. 1. – 378 pp.
5. Leordeanu M., Hebert M. Smoothing-based optimization // 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – IEEE, 2008. – P. 1-8.
6. Растрингин Л. А. Системы экстремального управления. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1974. – 630 с.
7. Ackley D. A connectionist machine for genetic hillclimbing. – Springer science & business media, 2012. – Т. 28. – 260 p.

8. Marinho P.R.D. et al. Adequacy Model: An R package for probability distributions and general purpose optimization // PloS one. – 2019. – Т. 14. – №. 8. – P. e0221487.
9. Griewank A.O. Generalized descent for global optimization // Journal of optimization theory and applications. – 1981. – Т. 34. – №. 1. – P. 11-39.
10. Schwefel H.P.P. Evolution and optimum seeking: the sixth generation. – John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 445 p.

References

1. Sun R.Y. Optimization for deep learning: An overview // Journal of the Operations Research Society of China. – 2020. – Т. 8. – №. 2. – P. 249-294.
2. Gunantara N. A review of multi-objective optimization: Methods and its applications // Cogent Engineering. – 2018. – Т. 5. – №. 1. – P. 1502242.
3. Sun S. et al. A survey of optimization methods from a machine learning perspective // IEEE transactions on cybernetics. – 2019. – Т. 50. – №. 8. – P. 3668-3681.
4. Vazirani V.V. Approximation algorithms. – Berlin: springer, 2001. – Т. 1. – 378 pp.
5. Leordeanu M., Hebert M. Smoothing-based optimization // 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – IEEE, 2008. – P. 1-8.
6. Rastrigin L.A. Systems of extremal control // Nauka. – 1974. – 630 p.
7. Ackley D. A connectionist machine for genetic hillclimbing. – Springer science & business media, 2012. – Т. 28. – 260 p.
8. Marinho P.R.D. et al. Adequacy Model: An R package for probability distributions and general purpose optimization // PloS one. – 2019. – Т. 14. – №. 8. – P. e0221487.
9. Griewank A.O. Generalized descent for global optimization // Journal of optimization theory and applications. – 1981. – Т. 34. – №. 1. – P. 11-39.
10. Schwefel H.P.P. Evolution and optimum seeking: the sixth generation. – John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 445 p.

Сысоев Роман Васильевич, аспирант кафедры программной инженерии, Сибирский Федеральный Университет, г. Красноярск, Россия

Антамошкин Олеслав Александрович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры программной инженерии, Сибирский Федеральный Университет, г. Красноярск, Россия

Sysoev Roman Vasilievich, Postgraduate student of the Department of Software Engineering, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Antamoshkin Oleslav Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Software Engineering, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia