

УДК 681.5.013

DOI: 10.18413/2518-1092-2020-5-1-0-2

Дылевский А.В.

**СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ
С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ БАТТЕРВОРТА**

Воронежский государственный университет, Университетская площадь, д.1, г. Воронеж, 394018, Россия

*e-mail: nefia@yandex.ru***Аннотация**

В статье рассматривается метод построения автоматических дифференциаторов с помощью полиномов Баттерворта. Синтез дифференциаторов сводится к построению следящей системы для объекта, представляющего собой последовательное соединение интеграторов. Полюсы дифференциаторов являются корнями многочленов Баттерворта. Корни многочлена Баттерворта расположены на круге некоторого радиуса равноудалённо друг от друга в левой полуплоскости комплексной плоскости. Радиус круга определяется частотой среза. Построенные автоматические дифференциаторы осуществляют асимптотически точное дифференцирование сигналов из достаточно широкого класса. Класс дифференцируемых сигналов определяется множеством непрерывно-дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной. Класс сигналов включает логарифмические, экспоненциальные и тригонометрические функции, алгебраические многочлены. Модальные дифференциаторы являются помехозащищенными по отношению к высокочастотным помехам. В статье проводится сравнительный анализ модальных дифференциаторов, построенных с помощью многочленов Баттерворта и дифференциаторов, полюсы которых образуют геометрическую последовательность. Для анализа дифференциаторов используются амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Приводится пример построения дифференциатора первого порядка. Во временной области рассматривается результат дифференцирования низкочастотного гармонического сигнала. Предлагаемые в статье дифференциаторы могут быть использованы для синтеза систем автоматического управления.

Ключевые слова: модальный дифференциатор; многочлены Баттерворта; класс сигналов; точность дифференцирования; помехозащищенность.

UDC 681.5.013

Dylevsky A.V.

**DESIGN OF AUTOMATIC DIFFERENTIATORS USING
BUTTERWORTH POLYNOMIALS**

Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russia

*e-mail: nefia@yandex.ru***Abstract**

The article considers a method for constructing of automatic differentiators using Butterworth polynomials. The synthesis of differentiators is reduced to the construction of a tracking system for a plant that is a serial connection of integrators. The poles of differentiators are the roots of Butterworth polynomials. The roots of the Butterworth polynomial are located on a circle of a certain radius equidistant from each other in the left half-plane of the complex plane. The radius of the circle is determined by the cutoff frequency. The constructed automatic differentiators perform asymptotically accurate differentiation of signals from a fairly wide class. The class of differentiable signals is defined by a set of continuously differentiable functions with a bounded high derivative. The class of signals includes logarithmic, exponential, and trigonometric functions, and algebraic polynomials. Differentiators are noise-proof against high-frequency

interference. The article provides a comparative analysis of differentiators constructed using Butterworth polynomials and differentiators whose poles form a geometric sequence. Amplitude-frequency and phase-frequency characteristics are used to analyze differentiators. An example of constructing a first-order differentiator is given. In the time domain, the result of differentiating a low-frequency harmonic signal is considered. The differentiators proposed in this article can be used for the synthesis of automatic control systems.

Keywords: modal differentiator; Butterworth polynomials; signal class; differentiation accuracy; noise protection.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач синтеза систем автоматического управления является получение информации о производных полезного сигнала [1-5]. В системах автоматического управления полезный сигнал, представляющий собой входное воздействие или выход объекта управления, заранее неизвестен, а выделен лишь класс таких сигналов [6]. Поэтому представляется вполне очевидной необходимость в использовании дифференцирующих устройств, осуществляющих многократное дифференцирование сигналов из некоторого класса.

Сложность решения задачи многократного дифференцирования объясняется принципиальной неосуществимостью точного дифференцирования из-за физической нереализуемости идеального дифференцирующего устройства с передаточной функцией $W(p) = p$, $p \in C$, а также присутствия высокочастотных аддитивных помех измерения полезного сигнала [6-8].

В [6] был предложен метод синтеза дифференциаторов, с помощью которых можно осуществлять многократное дифференцирование широкого класса сигналов в присутствии высокочастотных помех измерения. Основная идея метода заключается в том, что синтез дифференциаторов сводится к построению следящей системы, где в качестве объекта выступает цепочка интеграторов. Показано, что дифференциатор, полюсы передаточной функции которого расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости, осуществляет асимптотически точное помехозащищенное дифференцирование сигналов достаточно широкого класса. Однако поведение ошибки дифференцирование во многом зависит от распределения этих полюсов на комплексной плоскости. В данной статье полюсы дифференциатора рассматривается как корни нормированных многочленов Баттерворта, определяющие одноимённые фильтры [9, 10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через F_m множество всех функций $f \in C^m[0, +\infty)$, удовлетворяющих $\forall M > 0$ дифференциальному неравенству

$$|f^{(m)}(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

Класс сигналов F_m является достаточно широким. Например, логарифмические, экспоненциальные и тригонометрические функции, алгебраические многочлены удовлетворяют требуемым условиям.

В [6] показано, что устройство с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{p^k L(p)}{D(p)}, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

является дифференциатором k -го порядка сигналов из класса F_m . Здесь $D(p)$ – желаемый многочлен,

$$D(p) = \sum_{i=0}^n d_i p^{n-i}, \quad d_0 = 1, \quad n \geq 2s, \quad \forall s \geq m, \quad (3)$$

$$L(p) = \sum_{i=s}^n d_i p^{n-i}. \quad (4)$$

Выберем желаемый многочлен $D(p)$ следующим образом:

$$D(p) = \prod_{j=1}^n (p + \lambda_j), \quad \operatorname{Re} \lambda_j > 0; \lambda_j \neq \lambda_i, j \neq i, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Было показано [6], что устройство с передаточной функцией (2) при условиях (3)-(5) является асимптотическим (по n и t) дифференциатором сигналов класса F_m , если значения λ_j являются членами геометрической прогрессии

$$\lambda_j = \beta q^{j-1}, \quad \beta > 0, q > 1. \quad (6)$$

Таким образом, предлагаемый метод построения модальных дифференциаторов позволяет получать за счёт увеличения порядка передаточной функции дифференциатора, т.е. за счёт усложнения структуры дифференциатора, асимптотически точное значение производных любого сигнала из класса F_m . Кроме того, дифференциаторы, синтезированные на основе предлагаемого подхода, являются помехоустойчивыми по отношению к высокочастотным помехам, так как относительный порядок передаточной функции дифференциатора равен $s - k$ ($k = \overline{0, m-1}$).

Следует отметить, что выбор корней желаемого многочлена $D(p)$ в виде геометрической прогрессии (6) не является единственно возможным. Например, в [6, 8] показано, что корни многочлена $D(p)$ могут являться членами арифметической прогрессии или быть кратными. Однако в этом случае доказать асимптотическую точность дифференцирования по n , вообще говоря, не удаётся. Поэтому вызывают интерес другие возможные распределения корней желаемого многочлена. В теории фильтрации особое внимание уделяется фильтрам Баттерворта [11-15]. Это связано с тем, что амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта максимально гладкая на частотах полосы пропускания и снижается практически до нуля на частотах полосы подавления, т.е. амплитудная характеристика фильтра Баттерворта близка по форме к прямоугольной характеристике идеального фильтра.

МНОГОЧЛЕНЫ БАТТЕРВОРТА

Рассмотрим передаточную функцию фильтра Баттерворта [9, 10]

$$H(p) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^n (p - p_k) / \omega_c} = \frac{G_0}{B_n(p)}. \quad (7)$$

Полюсы p_k , $k = \overline{1, n}$, передаточной функции фильтра Баттерворта расположены на круге радиуса ω_c (ω_c – частота среза) равноудалённо друг от друга в левой полуплоскости p -плоскости. Полнос p_k определяется из следующего выражения:

$$p_k = \omega_c e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}} = \omega_c s_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

В формуле (7) $G_0 = const$ – коэффициент усиления на постоянной составляющей (коэффициент усиления на нулевой частоте). Действительно,

$$H(0) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^n (-p_k) / \omega_c} = \frac{(-\omega_c)^n G_0}{\prod_{k=1}^n p_k}. \quad (9)$$

В силу формулы (8) имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n p_k &= \prod_{k=1}^n \omega_c \exp\left(\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}\right) = \\ &= \omega_c^n \exp\left(\frac{j\pi}{2n} \sum_{k=1}^n (2k+n-1)\right) = \omega_c^n \exp(j\pi n) = (-\omega_c)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (9) получаем

$$H(0) = G_0.$$

Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем рассматривать случай

$$G_0 = 1.$$

Знаменатель $B_n(p)$ передаточной функции фильтра Баттерворта называется полиномом Баттерворта. Как правило, полиномы Баттерворта $B_n(p)$ нормируются на частоте среза ω_c и рассматриваются нормированные полиномы Баттерворта $B_n^*(s)$

$$B_n(p) = \prod_{k=1}^n (p - p_k) / \omega_c = \prod_{k=1}^n (p / \omega_c - p_k / \omega_c) = \prod_{k=1}^n (s - s_k) = B_n^*(s), \quad (10)$$

где

$$s = p / \omega_c. \quad (11)$$

Полиномы Баттерворта $B_n^*(s)$ могут записываться в комплексной форме, как показано выше. Однако обычно полиномы Баттерворта записываются в виде соотношений с вещественными коэффициентами, т.е. комплексно-сопряжённые пары объединяются с помощью умножения. Нетрудно проверить, что нормированные полиномы Баттерворта $B_n^*(s)$ имеют следующую каноническую форму:

$$B_n^*(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \left(s^2 + 2s \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} + 1 \right), \quad n - \text{чётное}, \quad (12)$$

$$B_n^*(s) = (s+1) \prod_{i=1}^{n/2-1} \left(s^2 + 2s \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} + 1 \right), \quad n - \text{нечётное}. \quad (13)$$

Как было отмечено выше, амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта на частотах полосы пропускания близка по форме к прямоугольной характеристике идеального фильтра и снижается практически до нуля на частотах полосы подавления (см. рис. 1 при $\omega_c = 1$ для $n = 4$ и $n = 9$).

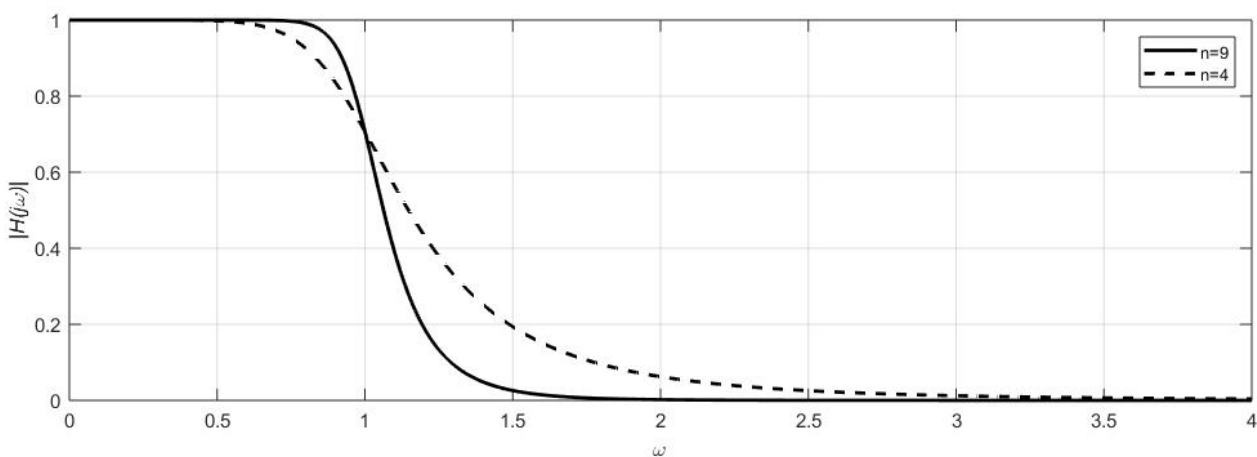


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта

Fig. 1. Amplitude-frequency response of the Butterworth filter

Фазо-частотная характеристика фильтра Баттерворта на частотах полосы пропускания имеет линейный характер, что свидетельствует о запаздывающих свойствах таких фильтров. На рис. 2 представлены фазо-частотные характеристики фильтра (2) при $k = 0$, $s = m = 2$, $n = 4$, $\beta = 1$, $q = 1,1$ (кривая а) и фильтра Баттерворта (кривая б) при $n = 4$.

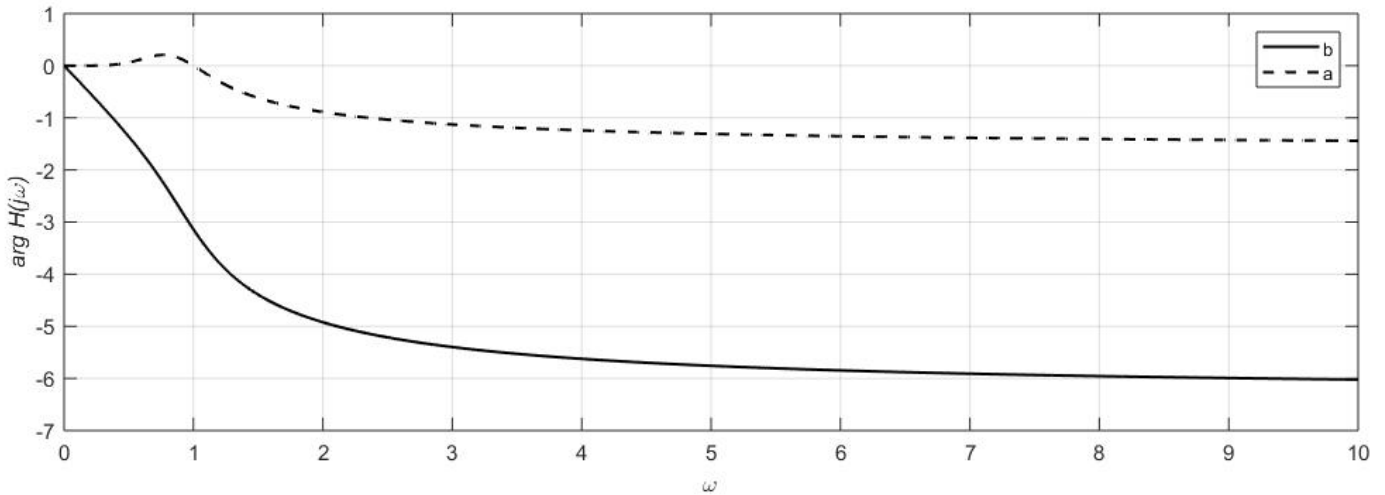


Рис. 2. Фазо-частотная характеристика фильтра Баттерворта
Fig. 2. Phase-frequency response of the Butterworth filter

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАТОРА

В передаточной функции дифференциатора (2) определим желаемый характеристический полином $D(p)$ как многочлен Баттерворта, т.е. положим

$$D(p) = B_n(p). \quad (14)$$

Следует отметить, что многочлен $B_n(p)$ является устойчивым. В самом деле, согласно (8) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p_k &= \omega_c \operatorname{Re} \exp\left(\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}\right) = \omega_c \cos \frac{(2k+n-1)\pi}{2n} = \\ &= -\omega_c \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

В силу условия $k = \overline{1, n}$ выполняется неравенство $\frac{1}{2} < 1 \leq k \leq n < n + \frac{1}{2}$. Поэтому $0 < \frac{(2k-1)\pi}{2n} < \pi$ и $\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} > 0$. Так как по построению $\omega_c > 0$, то $\operatorname{Re} p_k < 0$, $k = \overline{1, n}$.

В формуле (2) при условиях (3), (4) положим $s = m = 2$, $k = 1$ и $n = 5$. Тогда передаточная функция дифференциатора имеет вид

$$W_{B,1}(p) = \frac{pL_B(p)}{B_5(p)}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} B_5(p) &= p^5 + 3,23607p^4 + 5,23607p^3 + 5,23607p^2 + 3,23607p + 1, \\ p_1 &= -1, \quad p_{2,3} = -0,8090 \pm 0,5878j, \quad p_{4,5} = -0,3090 \pm 0,9511j, \\ L_B(p) &= 5,23607p^3 + 5,23607p^2 + 3,23607p + 1. \end{aligned}$$

Передаточную функцию модального дифференциатора определим при $s = m = 2$, $k = 1$, $n = 5$, $\beta = 1.2$, $q = 1.1$. В этом случае имеем

$$W_1(p) = \frac{pL(p)}{D(p)}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} D(p) &= p^5 + 7,32612p^4 + 21,37175p^3 + 31,03179p^2 + 22,42714p + 6,45406, \\ \lambda_1 &= 1,2, \quad \lambda_2 = 1,32, \quad \lambda_3 = 1,452, \quad \lambda_4 = 1,5972, \quad \lambda_5 = 1,75692, \end{aligned}$$

$$L(p) = 21,37175p^3 + 31,03179p^2 + 22,42714p + 6,45406.$$

На рис. 3 и рис. 4 изображены соответственно амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики модального дифференциатора (16) (кривая а) и дифференциатора (15), построенного с помощью многочлена Баттерворта (кривая б).

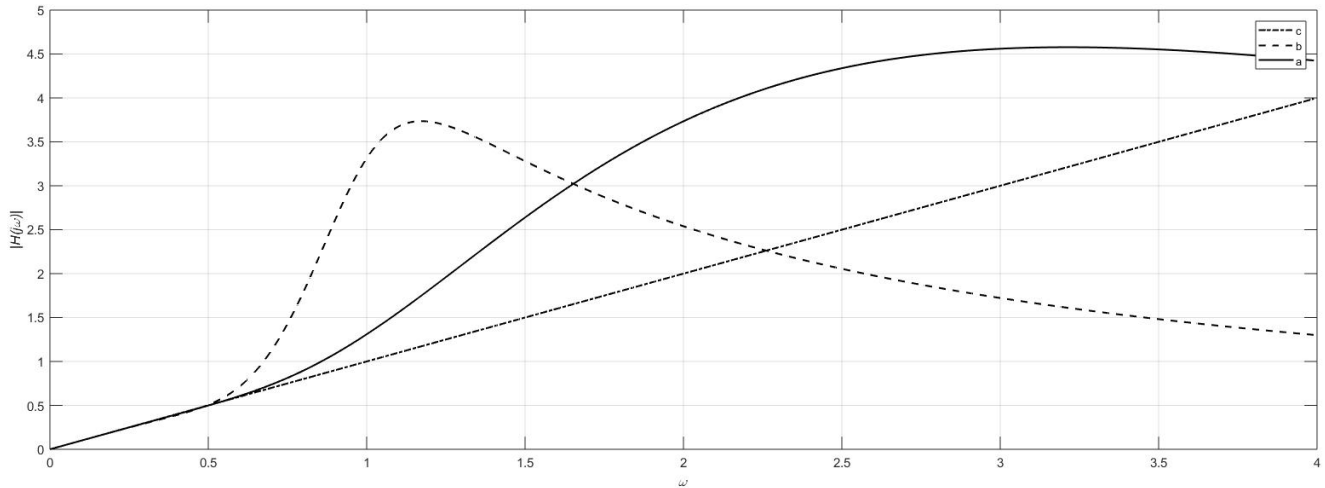


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики дифференциаторов
Fig. 3. Amplitude-frequency characteristics of differentiators

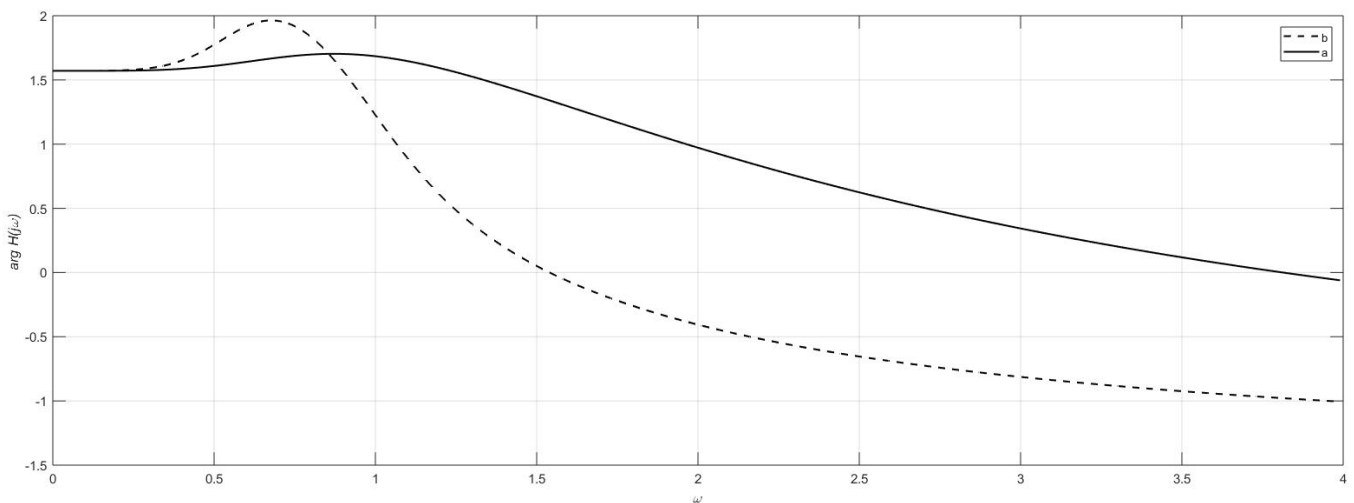


Рис. 4. Фазо-частотные характеристики дифференциаторов
Fig. 4. Phase-frequency characteristics of the differentiators

Результат дифференцирования сигнала $f(t) = \sin 0,3t$ представлен на рис. 5. Кривая а соответствует производной $f'(t) = 0,3 \cos 0,3t$, кривая б – результат дифференцирование с помощью модального дифференциатора (16), кривая с – результат дифференцирование дифференциатора (15), построенного с помощью полинома Баттерворта.

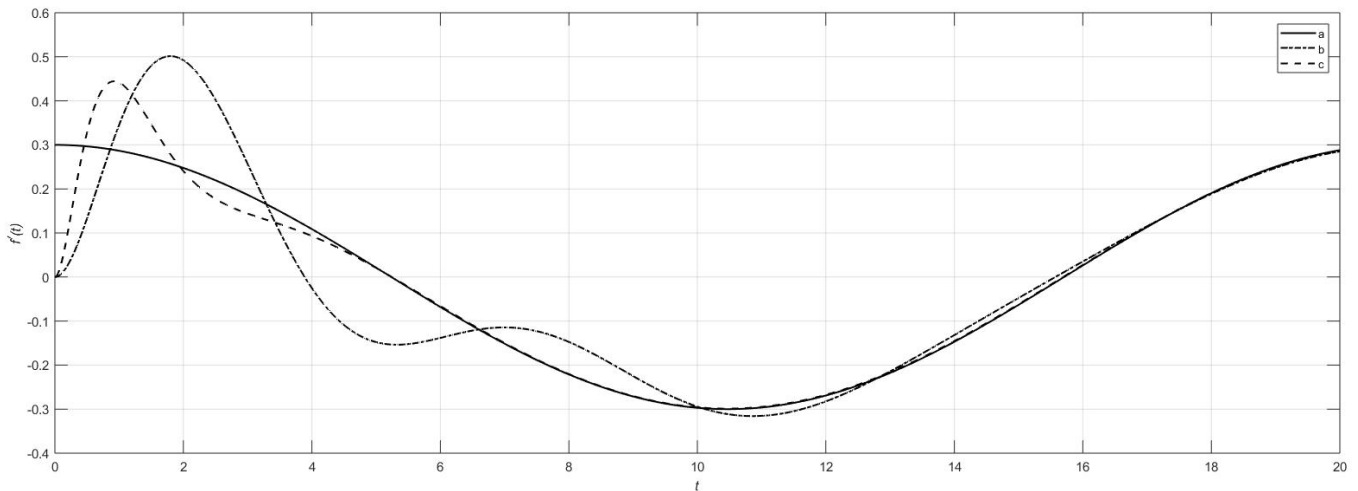


Рис. 5. Результат дифференцирования с помощью дифференциатора
Fig. 5. Result of differentiation using a differentiator

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен метод построения дифференциаторов с помощью нормированных многочленов Баттерворта. Несмотря на то, что фильтры Баттерворта обладают близкой к идеальной амплитудно-частотной характеристикой, линейность фазо-частотной характеристики в полосе пропускания и наличие комплексно-сопряженных полюсов значительно ухудшают качество дифференцирования сигналов: наблюдаются эффекты запаздывания и колебательность. При этом выбор полюсов модального дифференциатора в виде геометрической прогрессии позволяет устранить эти недостатки.

Следует добавить, что предложенный в статье подход к синтезу дифференциаторов может быть применен для автоматического дифференцирования в задачах оптимизации [16-20].

Список литературы

1. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2018. 360 с.
2. Подчукаев В.А. Теория автоматического управления (аналитические методы). М.: Физматлит, 2015. 392 с.
3. Robust Adaptive Model Predictive Building Climate Control / Tanaskovic M., Sturzenegger D., Smith R., Morari M. // Proc. 20 World Congr. Int. Federat. Autom. Control (Toulouse, France, July 9–14, 2017). Toulouse, 2017. P. 1907–1912.
4. Sanz R. Enhanced Disturbance Rejection for a Predictor-Based Control of LTI Systems with Input Delay // Automatica. 2016. Vol. 72. P. 205–208.
5. Furtat I. Disturbance Compensation with Finite Spectrum Assignment for Plants with Input Delay // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. Vol. 63, No 1. P. 298–305.
6. Лозгачев Г.И., Дылевский А.В. Автоматические дифференциаторы: построение и применение в задачах управления. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2000. 144 с.
7. Дылевский А.В., Лозгачев Г.И. Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // Автоматика и телемеханика. 1999. № 9. С. 13–20.
8. Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Modal differentiator design // Comput. Math. Model. 2000. Vol. 11, No 2. P. 109–118.
9. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego: California Technical Publishing, 1997. 626 p.
10. Лукас В.А. Теория автоматического управления. М.: Недра, 1990. 416 с.
11. Bianchi G.R. Sorrentino Electronic Filter: Simulation & Design. New York: McGraw Hill, 2007. 606 p.
12. Full-wave design of canonical waveguide filters by optimization / Shen T., Qiu T., Zaki K.A., Atia A.E., Dolan T.G. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2003. Vol. 51, No 2. p. 504–511.

13. Lutovac M.D., Tomic D.V., Evans B.L. Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 2001. 756 p.
14. Rorabaugh B.C. Approximation Methods for Electronic Filter Design. New York: McGraw-Hill, 1999. 518 p.
15. Айкин С. Adaptive Filter Theory. Paramus, NJ: Prentice-Hall, 2001. 936 p.
16. Айда-Заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ // Математическое Моделирование. 1989. Т. 1. С. 121–139.
17. Эффективный алгоритм для дифференцирования и задачи экстремали / Ким К., Нестеров Ю., Скоков В., Черкасский Б. // Экономика и математические методы, 1984. Т. 20. С. 309–318.
18. Birgin E.G., Evtushenko Y.G. Automatic differentiation and spectral projected gradient methods for optimal control problem // Optimization methods and software. 1998. V. 10. P. 125–146.
19. Evtushenko Y.G., Zasuhina E.S., Zubov V.I. FAD Method to Compute Second Order Derivatives / Automatic Differentiation of Algorithms. From Simulation to Optimization. Springer-Verlag, New York, Inc., 2002. P. 327–333.
20. Griewank A. On automatic differentiation / In: M. Iri and K. Tanabe (Eds.) Mathematical Programming: Recent Developments and Applications. Kluwer Academic Publishers, 1989. P. 83–108.

References

1. Gajduk A.R. Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach). M.: Fizmatlit, 2018. 360 p.
2. Podchukaev V.A. Automatic control theory (analytical methods). M.: Fizmatlit, 2015. 392 p.
3. Robust Adaptive Model Predictive Building Climate Control / Tanaskovic M., Sturzenegger D., Smith R., Morari M. // Proc. 20 World Congr. Int. Federat. Autom. Control (Toulouse, France, July 9–14, 2017). Toulouse, 2017. P. 1907–1912.
4. Sanz R. Enhanced Disturbance Rejection for a Predictor-Based Control of LTI Systems with Input Delay // Automatica. Vol. 72 (2016): 205–208.
5. Furtat I. Disturbance Compensation with Finite Spectrum Assignment for Plants with Input Delay // IEEE Trans. Autom. Control. Vol. 63, No 1 (2018): 298–305.
6. Lozgachev G.I., Dylevskij A.V. Automatic differentiators: design and application in control tasks. Voronezh: Izd-vo Voronezh. gos. un-ta, 2000. 144 p.
7. Dylevskij A.V., Lozgachev G.I. Application of the state space method for the synthesis of differentiators // Avtomatika i telemekhanika. № 9 (1999): 13–20.
8. Dylevskij A.V., Lozgachev G. I. Modal differentiator design // Comput. Math. Model. Vol. 11, No 2 (2000): 109–118.
9. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego: California Technical Publishing, 1997. 626 p.
10. Lukas V.A. Automatic control theory. M.: Nedra, 1990. 416 p.
11. Bianchi G.R. Sorrentino Electronic Filter: Simulation & Design. New York: McGraw Hill, 2007. 606 p.
12. Full-wave design of canonical waveguide filters by optimization / Shen T., Qiu T., Zaki K.A., Atia A.E., Dolan T.G. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol. 51, No 2 (2003): 504–511.
13. Lutovac M.D., Tomic D.V., Evans B.L. Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 2001. 756 p.
14. Rorabaugh B.C. Approximation Methods for Electronic Filter Design. New York: McGraw-Hill, 1999. 518 p.
15. Айкин С. Adaptive Filter Theory. Paramus, NJ: Prentice-Hall, 2001. 936 p.
16. Айда-Заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Fast automatic differentiation on a computer // Математическое Моделирование. Vol. 1 (1989): 121–139.
17. An efficient algorithm for the differentiation and the problem of extremal / Kim K., Nesterov Yu., Skokov V., Cherkasskij B. // Ekonomika i matematicheskie metody. Vol. 20 (1984): 309–318.
18. Birgin E.G., Evtushenko Y.G. Automatic differentiation and spectral projected gradient methods for optimal control problem // Optimization methods and software. V. 10 (1998): 125–146.
19. Evtushenko Y.G., Zasuhina E.S., Zubov V.I. FAD Method to Compute Second Order Derivatives / Automatic Differentiation of Algorithms. From Simulation to Optimization. Springer-Verlag, New York, Inc., 2002. P. 327–333.
20. Griewank A. On automatic differentiation / In: M. Iri and K. Tanabe (Eds.) Mathematical Programming: Recent Developments and Applications. Kluwer Academic Publishers, 1989. P. 83–108.

Дылевский Александр Вячеславович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры ERP-систем и бизнес-процессов факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета,

Dylevsky Alexander Vyacheslavovich, doctor of technical sciences, associate professor, professor of the Department of ERP-systems and business processes, the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University